Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

MA-1112 —Practica: semana 6 y/o 7 —

Ejercicios sugeridos para la semana 6 y/o 7. Cubre el siguiente material: Cálculo de volumenes de sólidos de revolución, funciones exponenciales, logaritmicas, hiperbólicas y sus inversas.

1. Halle las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $z = x^3 \ln(x^2) + (\log_7(\pi x + e))^5$.
   Solución:
   $$\frac{dz}{dx} = 3x^2 \ln(x^2) + 2x^2 + \frac{5\pi\left(\log_7(\pi x + e)\right)^4}{\ln(7)(\pi x + e)}.$$

   b) $y = \sqrt{e^{x^2}} + e^{\sqrt{x^2}}$.
   Solución:
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{x\exp(x^2)}{\sqrt{\exp(x^2)}} + \exp(x).$$

   c) $y = 3^{2x^2-3x}$.
   Solución:
   $$\frac{dy}{dx} = \ln(3)(4x-3)3^{2x^2-3x}.$$

   d) $y = \sqrt{\log_{10}\left(3^{x^2-x}\right)}$.
   Solución:
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(3)(2x-1)}{2\ln(10)\sqrt{\log_{10}\left(3^{x^2-x}\right)}}.$$

   e) $y = x^{\pi+1} + (1+\pi)^x$.
   Solución:
   $$\frac{dy}{dx} = (\pi+1)\left(x^{pi} + \ln(\pi+1)(\pi+1)^{x-1}\right).$$

   f) $y = x^x$ con $x > 0$.
   Solución:
   $$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \ln(x)).$$

g) $y = g(x)^{f(x)}$, suponga que $g(x)$ y $f(x)$ son diferenciables y $g(x)$ es siempre positiva.

Solución:

Si $g^{'}(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = C$ con $C > 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} g(x)^{f(x)}\left(f^{'}(x)\ln(g(x)) + \frac{f(x)}{g^{'}(x)}\right) & \text{Si } g^{'}(x) \neq 0 \\ \left(f^{'}(x)\ln(C)\right)C^{f(x)} & \phantom{\text{Si }} g^{'}(x) = 0 \end{cases}$$

h) $e^{x+y} = 4 + x + y$ (derivada implicita).

Solución:

Supongamos que y depende de x, derivando ambos lados de la ecuación con respecto a x. Es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x+y}\right) = \frac{d}{dx}(4 + x + y),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \left(1 + y^{'}\right)e^{x+y} &= 1 + y^{'} \\ e^{x+y} + y^{'}e^{x+y} &= 1 + y^{'} \\ e^{x+y} - 1 &= y^{'}\left(1 - e^{x+y}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tfrac{dy}{dx} = -1.$$

i) $y = \coth(\operatorname{arctanh}(x))$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{csch}^2(\operatorname{arctanh}(x))}{1 - x^2}.$$

j) $y = \ln(\operatorname{arccosh}(x))$.

Solución:

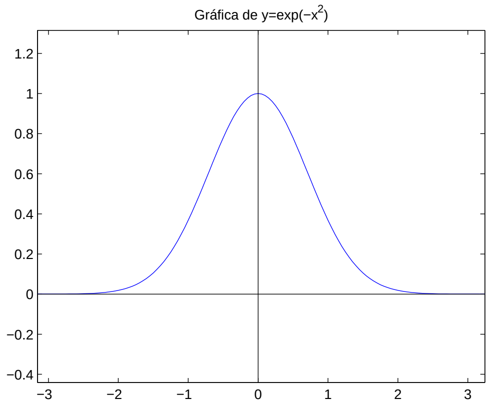
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\operatorname{arccosh}(x)}.$$

k) $y = 5\operatorname{senh}^2(x) + x^2\cosh(3x) - x\operatorname{arcsenh}(x^3)$.

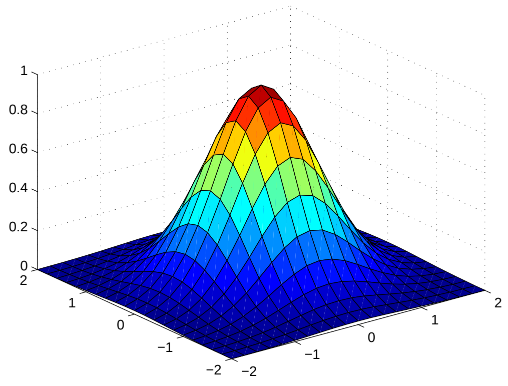
Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 10\operatorname{senh}(x)\cosh(x) + 2x\cosh(3x) + 3x^2\operatorname{senh}(3x) - \operatorname{arcsenh}(x^3) - \frac{3x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

2. La región acotada por $y = e^{-x^2}, y = 0, x = 0$ y $x = 2$, se hace girar con respecto al eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución resultante (ver el gráfico).

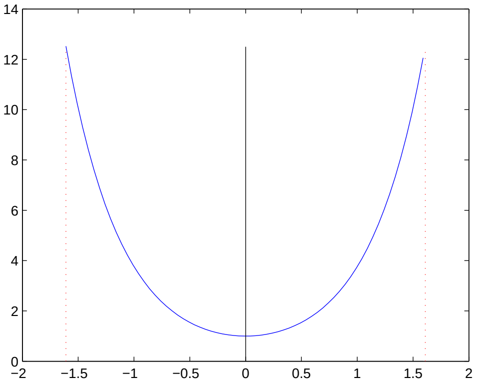


Solución:
El gráfico resultante de rotar la región acotada alrededor del eje y se muestra en la siguiente figura



Si utilizamos el método de cascarones, $V = 2\pi \int_0^2 x \exp(-x^2)dx$. Realizando el cambio de variable $u = x^2$, obtenemos que $V = \pi \int_0^4 \exp(-u)du = \pi\left(1 - e^{-4}\right)$.

3. Encuentre el área de la región acotada por $y = \cosh(2x), y = 0, x = -\ln(5)$ y $x = \ln(5)$.
Solución:
La región acotada por $y = \cosh(2x), y = 0, x = -\ln(5)$ y $x = \ln(5)$ y se muestra en la siguiente figura



y $A = 2\int_0^{\ln(5)} \cosh(2x)dx = \operatorname{senh}(2x)|_0^{\ln(5)} = 2,4$.

4. Halle las siguientes integrales

a) $\int x2^{x^2}dx$.
Solución:

$$\int x2^{x^2}dx = \frac{2^{x^2-1}}{\ln(2)} + C.$$

b) $\int \frac{2\ln(x)}{x}dx$.
Solución:

$$\int \frac{2\ln(x)}{x}dx = \ln^2(x) + C.$$

c) $\int_0^1 \left(10^{3x} + 10^{-3x}\right)dx$.
Solución:

$$\int_0^1 \left(10^{3x} + 10^{-3x}\right)dx = \frac{1}{3\ln(10)}\left(10^3 - 10^{-3}\right).$$

d) $\int (x+3)e^{x^2+6x}dx$.
Solución:

$$\int (x+3)e^{x^2+6x}dx = \frac{1}{2}e^{x^2+6x} + C.$$

e) $\int_0^1 e^{2x+3}dx$.
Solución:

$$\int_0^1 e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}\left(e^5 - e^3\right).$$

f) $\int \frac{6v+9}{3v^2+9v}dv$.
Solución:

$$\int \frac{6v+9}{3v^2+9v}dv = \ln|3v^2+9v| + C.$$

g) $\int \cot(\theta)d\theta$.
Solución:

$$\int \cot(\theta)d\theta = \ln|\operatorname{sen}(\theta)| + C.$$

h) $\int \sec(u)\csc(u)du$.
Solución: Dado que $\sec(u)\csc(u) = \frac{1}{\operatorname{sen}(u)\cos(u)} = \frac{\operatorname{sen}^2(u)+\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(u)\cos(u)} = \tan(u) + \cot(u)$

$$\int \sec(u)\csc(u)du = \int \tan(u)du + \int \cot(u)du = -\ln|\cos(u)| + \ln|\operatorname{sen}(u)| + C.$$

i) $\int x\coth(x^2)\ln(\operatorname{senh}(x^2))dx$.
Solución:
Realizando el cambio de variable $u=\ln(\operatorname{senh}(x^2))$, se obtiene que

$$\int x\coth(x^2)\ln(\operatorname{senh}(x^2))dx=\frac{1}{2}\int u^2du=\frac{u^3}{6}+C.$$

Devolvemos el cambio de variable realizado

$$\int x\coth(x^2)\ln(\operatorname{senh}(x^2))dx=\frac{\ln^3(\operatorname{senh}(x^2))}{6}+C.$$

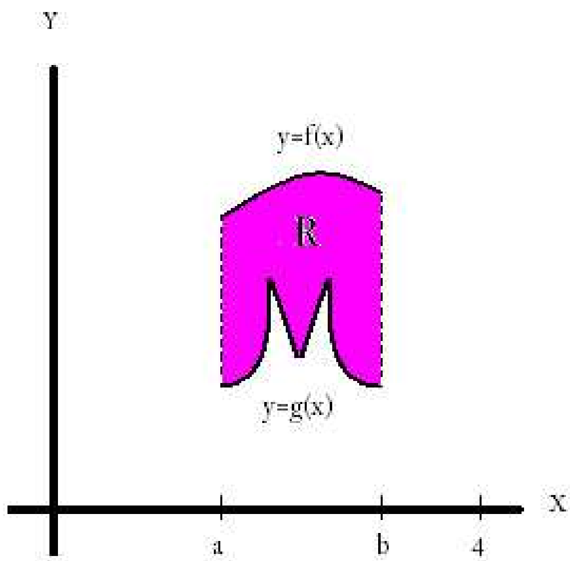
j) $\int\frac{\operatorname{senh}(2z^{1/4})}{\sqrt[4]{z^3}}dz$.
Solución:
Realizando el cambio de variable $u=2z^{1/4}$, se obtiene que

$$\int\frac{\operatorname{senh}(2z^{1/4})}{\sqrt[4]{z^3}}dz=2\int\operatorname{senh}(u)du=2\cosh(u)+C.$$

Devolvemos el cambio de variable realizado

$$\int\frac{\operatorname{senh}(2z^{1/4})}{\sqrt[4]{z^3}}dz=2\cosh(2z^{1/4})+C.$$

5. Considere la región R que se muestra en la siguiente figura. Formule una integral para el volumen del sólido que se generacuando se hace girar R alrededor de la recta dada, utilice el método que se indica.



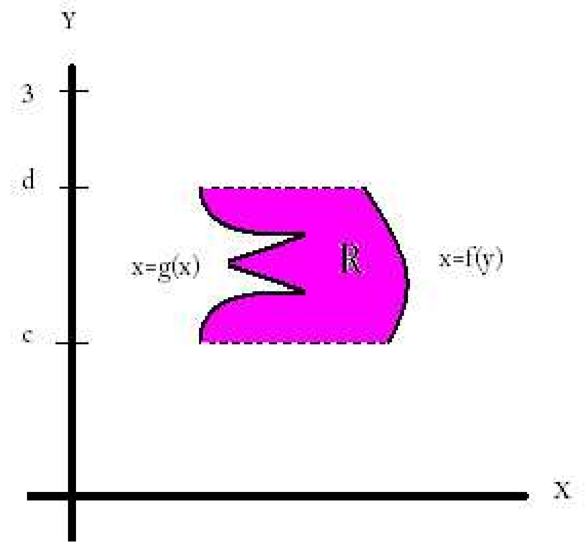
a) El eje x (arandelas).
Solución:
$R=f(x)$ y $r=g(x)$, entonces $V=\pi\int_a^b\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx$.

b) El eje y (cascarones).
Solución:
$V=2\pi\int_a^b x\left(f(x)-g(x)\right)dx$.

c) La recta $x = a$ (cascarones).
Solución:
$V = 2\pi \int_a^b (x-a)\,(f(x)-g(x))\,dx$.

d) La recta $x = b$ (cascarones).
Solución:
$V = 2\pi \int_a^b (b-x)\,(f(x)-g(x))\,dx$.

6. Considere la región R que se muestra en la siguiente figura. Formule una integral para el volumen del sólido que se generacuando se hace girar R alrededor de la recta dada, utilice el método que se indica.



a) El eje y (arandelas).
Solución:
$R = f(y)$ y $r = g(y)$, entonces $V = \pi \int_c^d \left(f^2(y) - g^2(y)\right) dy$.

b) El eje x (cascarones).
Solución:
$V = 2\pi \int_c^d y\,(f(y)-g(y))\,dy$.

c) La recta $y = 3$ (cascarones).
Solución:
$V = 2\pi \int_c^d (3-y)\,(f(y)-g(y))\,dy$.

Ejercicios opcionales

7. La intensidad del sonido se mide en decibeles, en honor de Alejandro Graham Bell (1847-1922), inventor del teléfono. Si la variación en la presión es de P libras por pulgada cuadrada, encuentre la intensidad L en decibeles es

$$L = 20\log_{10}(121,3P)$$

Encuentre la variación en la presión por una banda de rock a 115 decibeles.
Solución:

$$P = \frac{10^{\frac{L}{20}}}{121,3}$$

Entonces, la variación en la presión por una banda de rock a 115 decibeles es igual a $4{,}6360 \times 10^3$ libras por pulgada cuadrada.

8. La magnitud M de un terremoto en la *escala de Richter* es

$$M = 0,67 \log_{10}(0,37E) + 1,46$$

donde E es la energía del terremoto en kilowatts-hora. Encuentre la energía del terremoto de magnitud 7.
Solución:

$$E = \frac{10^{\frac{M-1,46}{0,67}}}{0,37}$$

entonces, la energía del terremoto de magnitud 7 es igual a $5{,}0171 \times 10^8$ kilowatts-hora.

9. La formula de Stirling dice que para n grande podemos aproximar $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ por

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Calcule $10!$ de manera exacta, luego de forma aproximada mediante la formula anterior.
Solución:
De forma exacta $10! = 3\ 628\ 800$. Utilizando la formula de Stirling $10! \approx 3\ 598\ 700$.